

基于最少控制点的非均匀有理 B 样条曲线拟合

周红梅¹, 王燕铭², 刘志刚¹, 卢秉恒¹

(1. 西安交通大学制造系统工程国家重点实验室, 710049, 西安;

2. 海军航空工程学院飞行器工程系, 264001, 烟台)

摘要: 针对叶片型线的优化设计, 提出采用自适应方法提取合适的节点来插值非均匀有理 B 样条 (NURBS) 曲线的算法, 实现了满足一定精度要求的数据点云拟合以及控制点的计算. 该方法首先通过点云外形特征提取主特征点, 把主特征点作为节点插值 NURBS 曲线, 通过德布尔递推公式求解控制点, 然后根据误差及曲率信息自适应地增加节点反复迭代, 直到达到要求的拟合误差精度, 从而简洁有效地实现了大量数据点云的拟合. 相比传统方法, 该方法能够更快地达到要求的逼近精度, 同时将误差与曲率信息结合起来调整节点, 不仅适合于有局部大曲率及有噪声点的数据点云的曲率计算, 而且可用于估计插值节点的数量和工业逆向设计中空间曲面控制点的提取, 为优化设计奠定了良好的基础.

关键词: 控制点; 自适应提取; 主特征点; NURBS 曲线

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)01-0073-05

Non-Uniform Rational B-Splines Curve Fitting Based on the Least Control Points

ZHOU Hongmei¹, WANG Yanming², LIU Zhigang¹, LU Bingheng¹

(1. State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China,

2. Department of Aircraft Engineering, Naval Aeronautic Engineering Institute, Yantai 264001, China)

Abstract: Aiming at the optimizing design of vane curve, a novel algorithm of adaptively choosing appropriate nodes is proposed to interpolate non-uniform rational B-splines (NURBS) curve, and the error-bounded curve fitting is carried out and the control points are determined. The dominant points are identified and extracted with the curvature information, and serve as nodes to interpolate NURBS curve, then the control points are evaluated via de Boor iterative equation. Simultaneously, a new node is adaptively added according to the error and curvature properties of fitting curve to iterate procedure until the required accuracy is met. Several experiments are performed to validate this method.

Keywords: least control point; adaptive refinement; dominant point; non-uniform rational B-splines curve

在工程型面的优化设计中, 设计变量的数量会直接影响优化设计的规模, 进而影响设计周期和设计效果, 因此设计变量必须尽可能少. 为了提高优化速度以及更好地反映叶片的特征, 要求用最少的控制点来控制叶片型线, 而传统的非均匀有理 B 样条曲线的整体拟合通常有 2 种方案: ①由一个小数目

的控制顶点开始, 通过检查拟合曲线对数据点的偏差来增加控制顶点的数目, 并经过数次迭代得到要求误差范围内的拟合曲线; ②先从一个大量目的控制顶点开始, 然后通过迭代减少控制顶点的数目来实现逼近. 这 2 种方案对于数据点较多的情况, 拟合迭代过程比较复杂, 计算量较大. 因此, 在传统曲

线拟合的基础上,研究人员针对不同对象衍生了许多拟合方法^[1-7]. Razdan^[1]提出采用自适应地选择节点来插值 B 样条曲线的方法,为了合理地选择节点,他考虑了反映原始数据点的外形信息,包括弧长和曲率分配.该方法针对已知参数化曲线,对有噪声的数据集的插值较敏感,但是却没有考虑曲线逼近误差. Li 等人^[2]针对密集且有噪声的数据点,首先对曲率进行滤波,节点选择的方法类似于文献^[1],提出的节点放置准则将比预期产生更多的节点,但同样没有考虑曲线逼近误差. Park 等人^[3]提出对有序点进行 B 样条逼近的方法,该方法提出了初始特征点的选取以及应用主特征点来调整节点矢量,在主特征点选取时,对原始数据点进行粗逼近得到的曲线进行曲率计算,因此需要事先估计一个控制点数.对于不同点云控制点数的估计没有一定的准则,与插值 B 样条曲线相比,采用最小二乘法逼近数据点更费时,而且对于曲率变化较大的点云,该方法将会产生较多的控制点.

本文提出了一种自适应地提取合适的节点来插值非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线拟合数据点云的算法.首先通过曲率信息选取主要特征点作为型值点,然后应用德布尔递推公式反算出控制点,建立 NURBS 曲线,根据误差及曲率特性自适应地增加节点,反复迭代直到达到要求的误差精度.

1 主特征点的识别与选取

主特征点反映点云的外形特征,它的选取对曲线拟合精度有至关重要的影响,如果选择得不合适,不仅增大了迭代次数,也可能达不到要求的拟合精度.主特征点主要由曲率信息决定,通过选取主特征点,可以提高拟合速度,减少迭代次数.主特征点识别的关键在于拐点和局部曲率极值点的确定.

本文采用分段曲线拟合方法,该方法通过选取数据点的邻域,并分成若干段来进行曲线拟合计算每段的曲率.

对于数据点云 $P_i (i=1, \dots, n)$, 选取每个数据点 P_i 的 m 邻域进行分段多项式拟合,得到离散点曲率

$$k_i = \|\dot{\mathbf{C}}(\bar{t}_i)\ddot{\mathbf{C}}(\bar{t}_i)\| / \|\dot{\mathbf{C}}(\bar{t}_i)\|^3 \quad (1)$$

式中: $\dot{\mathbf{C}}(\bar{t}_i)$ 、 $\ddot{\mathbf{C}}(\bar{t}_i)$ 分别是每段曲线 $\mathbf{C}(t_i)$ 的一阶、二阶微商; t_i 为点云参数. 选取首末端点和局部曲率极大值点(满足 $k_i > k_{i-1}$ 且 $k_i > k_{i+1}$ 的数据点)作为特征点.

在选取邻域的过程中,对于有序点云,若邻近的

数据点不在 m 邻域范围内,则认为它是粗大噪点,可将其剔除. 为了对图 1 中某叶片模型进行重构,提取合适的控制点进行调节来优化叶型. 对叶型面采用三坐标扫描得到 1 533 个数据点集,对点集进行 10 邻域分段 3 次样条拟合计算数据点云的曲率,按选取首末端点和局部曲率极大值点的方法提取特征点实现数据的精简,对精简后的模型插值拟合计算出误差相对较小的曲率,如图 2 所示,图中横坐标是对数据点的点距采用累积弦长参数化法得到的.

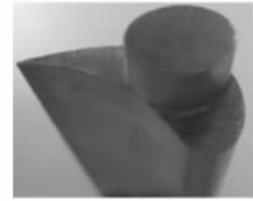


图 1 叶片模型

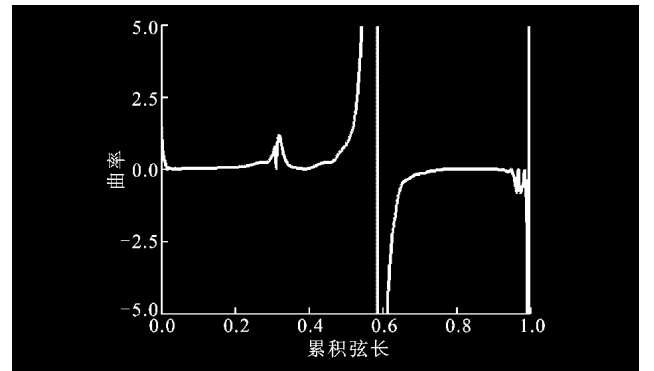


图 2 叶片曲率图

由于图 1 叶片的局部曲率过大,若采用文献^[1]中取曲率平均值的方法,提取出的主特征点将集中在图 2 中的尖端位置,这样拟合的初始模型误差较大. 针对这种情况,采用分段提取主特征点的方法,首先在图 2 的 2 个峰值过渡区(0.55 和 0.68 区间段)查找 $k_i k_{i+1} < 0$ 的节点,选取其中 $|k|$ 的较大点为主特征点,然后从该段将曲率分成 2 部分,0 到 0.55 区间段曲率如图 3 所示. 为了更好地获取叶片的外形特征,要对离散曲率进行光顺,并引入曲率对参数化节点矢量 $\mathbf{U}$ 的积分函数来计算积分曲率 K (根据 Trapezoidal 规则^[8]),这样,既兼顾了曲率和弧长信息,又更好地描述了点集的外形特征

$$K_i = \int_{u_1}^{u_{n-1}} |k| dt = \sum_{i=1}^{n-1} (|k_i| + |k_{i+1}|)(t_{i+1} - t_i)/2 \quad (2)$$

主特征点的选取基于 2 个规则:①如果 $|K_i - K_j| < e$ (e 为一个较小值),即曲率在该区间段变化很小,可取这段区域的中点为主特征点;② K 曲线

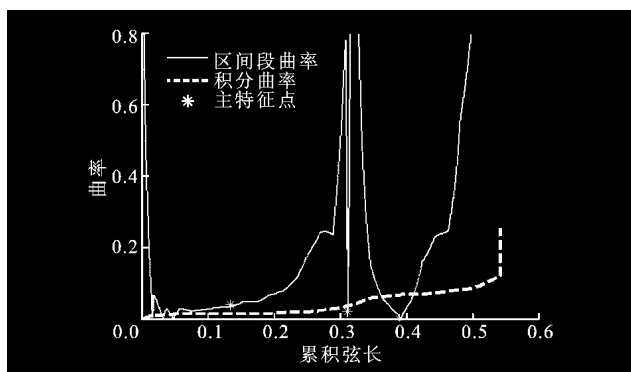


图3 叶片分段曲率图

的凹凸转折点也应选为主特征点(见图3)。由于曲率计算的误差,初始主特征点数不能选得过多,否则既会产生过多的控制点,也可能达不到要求的拟合精度。然而,初始主特征点的选择也可能遗漏一些关键点,这可以在以后的迭代过程中通过增加节点来补充。

图4是应用主特征点作为节点,进行曲线插值获得的拟合曲线。图5是主特征点提取与传统的均匀分布节点的拟合误差图。

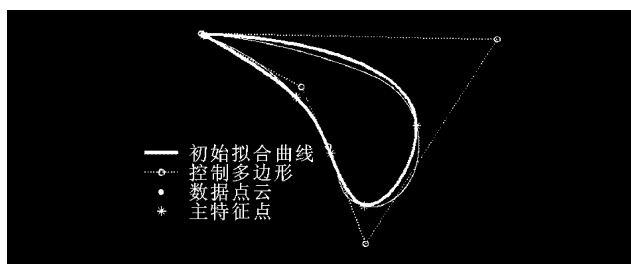


图4 初始拟合曲线

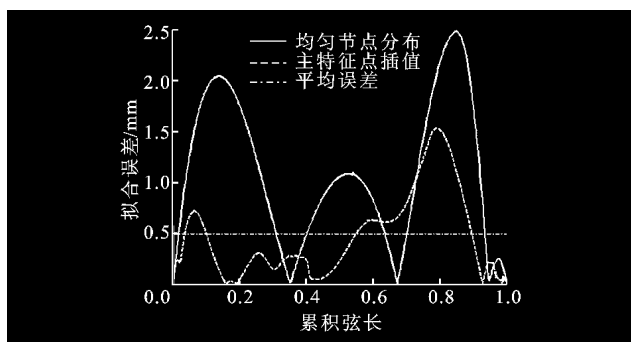


图5 初始拟合误差图

从表1中可明显看出,作为初始曲线,选取主特征点的方法拟合误差较小,如不考虑曲率信息,均匀分布的节点的误差较大。

表1 均匀分布节点与主特征点插值误差的对比

初始曲线拟合	最大误差/mm	平均误差 /mm
均匀分布节点	2.534	1.00
主特征点	1.526	0.49

2 控制点的反算

逆向工程中的优化设计通常要求对控制点进行权因子调节来指导设计,德布尔算法是快速而且数值稳定的算法,将提取出的主特征点作为节点,应用德布尔算法反算出其控制点。节点插值的NURBS曲线方程如下

$$P_i = P(t_{i+k-2}) = \sum_{j=i}^{i+k-2} N_{j,k}(t_{i+k-2}) \omega_j b_j / \sum_{j=i}^{i+k-2} N_{j,k}(t_{i+k-2}) \omega_j \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$T = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k-1}, t_{n+k}\}$$

式中: b_j ($j=0, \dots, n+1$) 是控制点; $N_{j,k}(t)$ 是节点矢量 T 定义的 k 阶 $k-1$ 次基函数; ω_j 为每个节点的权因子(为了便于计算选为1)。 T 两端各有 k 个重节点,采用累积弦长参数化法确定 T 的参数为

$$v_0 = 0; v_n = 1 \quad (4)$$

$$v_i = v_{i-1} + |p_i - p_{i-1}| / \sum_{i=1}^n |p_i - p_{i-1}| \quad i = 2, \dots, n \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} t_0 &= \dots = t_{k-1} = 0 \\ t_{k+j} &= \frac{1}{k} \sum_{i=j}^{j+k-1} v_i \quad j = 0, \dots, n-k \\ t_{n+1} &= \dots = t_{n+k} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由于式(3)中的 n 个方程要求解 $n+2$ 个控制点,因此必须补充2个通常由边界条件给出的附加方程,这里是通过添加2个边界切矢条件来求解。

3 节点的自适应添加

本文要解决的问题是用最少的控制点、以一定的精度光滑地拟合数据点云,并由主特征点来插值初始曲线,若不满足拟合精度条件,就必须自适应地添加节点。

3.1 曲线拟合的误差评判

同样的拟合曲线若采取不同的误差评判标准,将会得出不同的结果,逼近一个给定的曲线采用Hausdorff距离^[9]评判将更加合理。数据点云的拟合要求拟合的曲线与原始数据点云的距离在一定公差范围内。 P_i ($i=1, \dots, n$) 的拟合曲线为 $C(t)$, 将 P_i 投影到 $C(t)$ 上得到 P'_i , 拟合误差和平均误差为

$$e_i = \|P'_i - P_i\| \quad (7)$$

$$\bar{e} = (\sum_{i=1}^n e_i^2)^{1/2} / n \quad (8)$$

式(7)评价的是给定点集偏离拟合曲线的距离,如果

数据点有噪声,用它作为评判将不准确,因此取平均标准误差作为评判的依据。

3.2 节点的添加

当主特征点选取后,插值出的曲线与原始数据点云有误差,通过式(7)计算出每个数据点的拟合误差, s 个主特征点将有 $s-1$ 个区间段,在平均误差最大的区间段内增加节点。通常采用的增加节点方法为:①取区间中点;②添加最大误差点作为增加的节点。第①种方法容易产生较多的控制点,而第②种方法由于噪声点的存在可能会导致不好的结果,因此为了更合适地添加节点,应把添加节点与曲率特性关联起来。

以图1的叶片点云为例,用第1节的方法得到的6个主特征点如图6所示。根据拟合曲线计算曲率,同时计算每个区间段的平均误差,找出最大误差段,在该区间查找最大曲率点和最大误差点,并作为新的增加节点,分别插值计算选取平均误差较小的节点添加方案。通过对比拟合计算结果,得到图6中的最大误差点为添加的第1个节点,这样反复迭代增加节点,直到达到要求的精度。在迭代过程中,如果增加节点后误差反而增大很多,说明是加入了噪声点作为节点,这时就要剔除该点并继续进行计算。

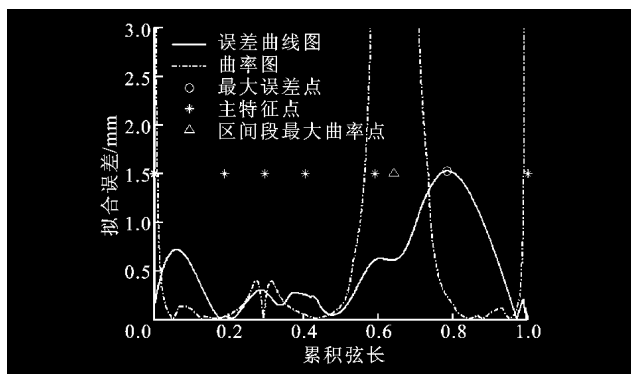


图6 自适应增加节点

4 实例

图7为图1的叶片用本文的算法在平均误差精度为0.04 mm的条件下,采用3次NURBS曲线插值得到的拟合曲线图。

为了进一步验证本方法的适用性,将其应用于其他模型(见图8)的重构。采用半径为2.5 mm的测头对凸轮模型面三坐标进行扫描,获得了从动件的运动曲线,从而可对其运动规律进行研究。对图8模型采用3次NURBS曲线拟合后,其从动件的运动曲线如图9、图10所示。叶片和两凸轮模型的拟

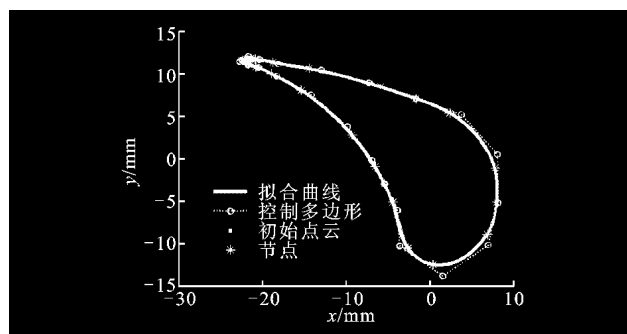


图7 叶片型面拟合曲线



(a) 凸轮 I (b) 凸轮 II

图8 凸轮模型

合见表2。

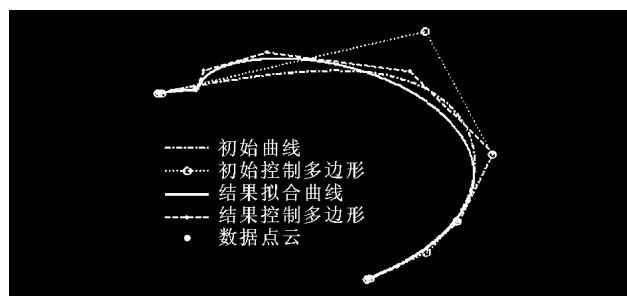


图9 凸轮 I 模型的曲线拟合



图10 凸轮 II 模型的曲线拟合

表2 模型的拟合误差

模型	数据 点数	初始平均 误差/mm	控制 点数	平均误差 /mm	最大误差 /mm
叶片	1 533	1.526	25	0.038	0.106
凸轮 I	594	0.644	15	0.039	0.082
凸轮 II	1 092	2.510	21	0.070	0.360

由于文中所选实例都是工厂生产中的实际模型经过三坐标扫描后得到的数据点集,因此不可避免

地会受到模型表面属性以及测量系统的不确定因素的影响,而且数据中存在着噪声点,但用该算法拟合的曲线基本上能够达到规定的拟合误差。

5 结 论

本文将曲线插值与拟合相结合,提出了一种自适应地选择节点来插值曲线的方法。通过曲率计算剔除噪声点,选取主特征点,以平均误差作为拟合评判的标准,自适应地增加节点,用德布尔递推算法插值节点,通过反复迭代得到了满足精度要求的拟合曲线。本文方法可用来估计插值节点的数量,也可用于工业逆向设计中空间曲面控制点的提取,因此为生产中的后期优化设计奠定了良好的基础。

参考文献:

- [1] RAZDAN A. Knot placement for B-spline curve approximation [EB/OL]. (2003-09-10) [2007-05-16]. <http://3dk.asu.edu/archives/publication/publication.html>.
- [2] LI Weishi, XU Shuhong, ZHAO Gang, et al. Adaptive knot placement in B-spline curve approximation [J]. Computer-Aided Design, 2005, 37(8): 791-797.
- [3] PARK H, LEE J H. B-spline curve fitting based on adaptive curve refinement using dominant points [J]. Computer-Aided Design, 2007, 39(6): 439-451.
- [4] LAI Yukun, HU Shimin, POTTSMANN H. Surface fitting based on a feature sensitive parametrization [J]. Computer-Aided Design, 2006, 38(7): 800-807.
- [5] YE Peiqing, ZHANG Hui. The knot factor method and its applications in blade measurement [J]. Aerospace Science and Technology, 2006, 10(5): 359-363.
- [6] PARK H. Choosing nodes and knots in closed B-spline curve interpolation to point data [J]. Computer-Aided Design, 2001, 33(13): 967-974.
- [7] KE Yinglin, ZHU Weidong, LIU Fengshan, et al. Constrained fitting for 2D profile-based reverse modeling [J]. Computer-Aided Design, 2006, 38(2): 101-114.
- [8] BOEHM W, PRAUTZCH H. Numerical method [M]. Wellesley: AK Peters, 1993.
- [9] PARK H. An error-bounded approximate method for representing planar curves in B-splines [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(5): 479-497.

(编辑 管咏梅)